4 Không gian tôpô compact

1. Chứng minh rằng hình lập phương, hình trụ, hình xuyến là các tập compact.

2. Chứng minh rằng nếu A, B là các tập compact của không gian X, Y chứa trong một tập mở N của X×Y thì tồn tại các tập mở U trong X và V trong Y sao cho $A \times B \subset U \times V \subset N$.

   Lấy ví dụ chứng tỏ rằng nếu bỏ giả thiết compact của ít nhất một trong hai tập A và B thì khẳng định không còn đúng nữa.

3. Chứng tỏ rằng mọi không gian Hausdorff compact đều là không gian chuẩn tắc.

4. Chứng tỏ rằng mọi không gian chính quy compact đều là không gian chuẩn tắc.

5. Chứng minh rằng một song ánh liên tục từ không gian tôpô compact X vào không gian tôpô Hausdorff Y là một phép đồng phôi.

6. Cho ánh xạ $f : X \to Y$ từ không gian tôpô X vào không gian compact Y. Chứng minh rằng f là ánh xạ liên tục nếu đồ thị của f (tập $G = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$) là tập đóng trong $X \times Y$.

7. Cho X là không gian tôpô compact và $f : X \to \mathbb{R}$ là hàm số bị chặn địa phương (nghĩa là với mọi $x \in X$ tồn tại lân cận U_x của x và số dương M_x để $|f(y)| \leqslant M_x$ với mọi $y \in U_x$). Chứng minh rằng f là hàm bị chặn (nghĩa là tồn tại số dương M sao cho $|f(x)| \leqslant M$ với mọi $x \in X$).

8. Cho X là không gian tôpô compact và $f : X \to \mathbb{R}$ là ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng nếu $f(x) > 0$ với mọi $x \in X$ thì tồn tại số dương ϵ sao cho $f(x) \geqslant \epsilon$ với mọi $x \in X$.