

2 Ánh xạ liên tục giữa các không gian tôpô

1. Cho X là một không gian tôpô và $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì các tập hợp $\{x \in X : f(x) > \alpha\}; \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ là các tập mở trong X .
2. Cho X, Y là các không gian tôpô. Giả sử A, B là các tập con đóng của X và $X = A \cup B, f : A \rightarrow Y, g : B \rightarrow Y$ là các ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A \cap B$ thì ánh xạ $h : X \rightarrow Y$ xác định bởi

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } x \in A, \\ g(x), & \text{nếu } x \in B, \end{cases}$$

liên tục trên X .

3. Cho X, Y, Z là các không gian tôpô và $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Z$ là các ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng ánh xạ $h : X \rightarrow Y \times Z$ xác định bởi $h(x) = (f(x), g(x))$ liên tục trên X .
4. Cho X là không gian tôpô và $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ là các ánh xạ liên tục. Giả sử $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A$, trong đó A là một tập con trù mật trong X . Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.
5. Cho X, Y là các không gian tôpô và $f : X \rightarrow Y$. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:
 - (1) $f^{-1}(\text{int}A) \subset \text{int}(f^{-1}(A))$ với mọi $A \subset Y$.
 - (2) $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$ với mọi $A \subset Y$.