BÀI TẬP KHÔNG GIAN METRIC (Tuần 5)

4 Nguyên lý ánh xạ co

1. Cho X là một không gian metric đầy và $A : X \to X$ là một ánh xạ liên tục sao cho có $n \in \mathbb{N}^*$ để $A^n = A \circ A \circ \cdots \circ A$ (n lần) là một ánh xạ co. Chứng minh rằng A có điểm bất động duy nhất.

2. Xét hệ phương trình tuyến tính n ẩn

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

trong đó a_{ij}, b_i $(i, j = 1, \dots, n)$ là các số thực cho trước . Chứng minh rằng hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất nếu một trong các điều kiện sau thoả mãn:

a) $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1$, $i = 1, \dots, n$;

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leqslant \alpha < 1$, $j = 1, \dots, n$;

c) $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \alpha < 1$.

3. Cho $\varphi \in C[a, b]$, $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ là một hàm số liên tục, λ là một số thực. Giả sử λ thoả mãn $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$, trong đó $M > 0$ là số thực mà $|K(t, s)| \leqslant M$ với mọi $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$. Ánh xạ $\Phi : C[a, b] \to C[a, b]$ xác định bởi

$$\Phi(x)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds + \varphi(t).$$

Chứng minh rằng Φ là ánh xạ co. Từ đó suy ra phương trình tích phân

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) x(s) ds + \varphi(t), t \in [a, b],$$

có duy nhất nghiệm trong $C[a, b]$.

4. Chứng minh rằng nếu hằng số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ khả vi và thoả mãn $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < 1$ thì f có điểm bất động.

5. Giả sử $\{f_n\}$ là một dãy ánh xạ liên tục từ không gian metric compact X vào chính nó hội tụ đều đến hàm f (trên X). Chứng minh rằng nếu các hàm f_n, $n = 1, 2, \dots$, có điểm bất động thì f cũng có điểm bất động.