BÀI TẬP KHÔNG GIAN METRIC (Tuần 4)

1 Không gian metric đầy đủ, định lý phạm trù Baire

1. $C[a,b]$ đầy đủ với metric hội tụ đều nhưng không đầy đủ với metric tích phân. l^p là đầy đủ.

2. Kí hiệu X là tập các dãy số thực bị chặn.

   (a) Chứng minh rằng $\rho(x,y) = \sup\{|x_n - y_n||n = 1, 2, \ldots\}, x = \{x_n\}, y = (y_n) \in X$ là một metric trên X và với metric này X là một không gian metric đầy.

   (b) Kí hiệu c là tập hợp các dãy số thực hội tụ. Chứng minh rằng c là một không gian con đóng của không gian metric X, do đó c cũng là một không gian metric đầy.

   (c) Kí hiệu s_0 là không gian con của X gồm tất cả các dãy số thực $\{x_n\}$ sao cho $x_n = 0$ tất cả ngoại trừ một số hữu hạn n. Chứng minh s_0 là không gian metric không đầy.

3. Chứng minh tập các số vô tỷ và tập các khoảng mở khác rỗng trong $\mathbb{R}$ thuộc phạm trù 2.

4. **(Thác triển liên tục)** Giả sử X, Y là các không gian metric trong đó Y là đầy đủ và A là một tập con của X. Chứng minh rằng nếu ánh xạ $f : A \to Y$ liên tục đều thì tồn tai duy nhất ánh xạ liên tục $g : \overline{A} \to Y$ sao cho $g|_A = f$, hơn nữa g là liên tục đều.

5. **(Định lý Osgood)** Cho $\mathcal{F}$ là tập các hàm thực liên tục trên $\mathbb{R}$ có tính chất: với mỗi $x \in \mathbb{R}$, tồn tại số thực $M_x > 0$ sao cho $|f(x)| \le M_x$ với mọi $f \in \mathcal{F}$. Chứng minh rằng tồn tại số thực $M > 0$ và tập mở $U \subset \mathbb{R}$ sao cho

$$|f(x)| \le M \quad \forall x \in U, \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

6. Giả sử X là một tập hợp, (Y, ρ) là một không gian metric. Kí hiệu $B(X,Y)$ là tập tất cả các ánh xạ $f : X \to Y$ bị chặn trên X (nghĩa là tập $f(X)$ bị chặn trong Y). Với mỗi cặp phần tử $f, g \in B(X,Y)$, đặt

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$

   (a) Chứng minh rằng d là một metric trên $B(X,Y)$.

   (b) Chứng minh rằng nếu Y là không gian metric đầy thì $B(X,Y)$ cũng là không gian metric đầy.

   (c) Xét trường hợp $Y = \mathbb{R}$ và ký hiệu $B(X) = B(X, \mathbb{R})$.

      (i) Cho $x \in X$ là một phần tử cố định. Mỗi $x \in X$ ta xác định hàm số $f_x : X \to \mathbb{R}$ theo công thức

$$f_x(y) = d(x,y) - d(y,a), \ y \in X.$$

      Chứng minh rằng $f_x \in B(X)$.

      (ii) Xét ánh xạ $\theta : X \to B(X), x \mapsto f_x$. Chứng minh rằng θ là một phép đẳng cự từ X lên một không gian con của $B(X)$. Từ đó suy ra tồn tại một không gian con đầy đủ $\widehat{X}$ sao cho X đẳng cự với một không gian con U của $\widehat{X}$ mà U trù mật trong $\widehat{X}$ (nói cách khác, $\widehat{X}$ là một đầy đủ hóa của X).