BÀI TẬP KHÔNG GIAN METRIC (Tuần 2 + 3)

1 Tính chất tôpô trong không gian metric

1. Giả sử A là một tập con của không gian metric (X, ρ), r là một số dương. Đặt

$$B(A, r) = \{x \in X : \rho(x, A) < r\}.$$

Chứng minh rằng

(a) $B(A, r)$ là mở và $B(\overline{A}, r) = B(A, r)$;

(b) Nếu B là một tập con khác rỗng của X thì tập hợp

$$\{x \in X : \rho(x, A) < \rho(x, B)\}$$

là tập mở. Từ đó suy ra nếu A, B là hai tập đóng rời nhau khác rỗng của X thì tồn tại các tập mở U, V trong X sao cho U chứa A, V chứa B và $\overline{U} \cap V = U \cap \overline{V} = \emptyset$.

2. Cho A là một không gian con của không gian metric X với metric d và $\varepsilon > 0$ là một số thực. Ký hiệu

$$O_\varepsilon(A) = \{x \in A : \text{ tồn tại } a \in A : d(x, a) < \varepsilon\},$$
$$C_\varepsilon(A) = \{x \in A : \text{ tồn tại } a \in A : d(x, a) \leq \varepsilon\},$$

(a) Chứng minh $O_\varepsilon(A)$ là một tập mở.

(b) Nếu A compact thì $C_\varepsilon(A)$ là một tập đóng. Kết luận còn đúng không nếu bỏ giả thiết compact?

3. Cho $\varphi \in C[a, b]$, ký hiệu

$$A = \{f \in C[a, b] : f(x) < \varphi(x), \ \ \forall x \in [a, b]\};$$
$$B = \{f \in C[a, b] : f(x) \leq \varphi(x), \ \ \forall x \in [a, b]\};$$
$$C = \{f \in C[a, b] : 0 < f(x) < 1, \ \ \forall x \in [a, b]\};$$

Chứng minh rằng A, C là các tập mở còn B là tập đóng trong $C[a, b]$ với metric sup.

4. Chứng minh rằng

$$A = \{f \in C[0, 1] : f(\frac{1}{2}) = 0\}$$

là một tập đóng, còn

$$B = \{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$$

không là tập đóng của không gian metric $C[0, 1]$ với metric sup.

2 Ánh xạ liên tục

1. Hãy xác định tính liên tục và liên tục đều của các ánh xạ sau

(a) $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ xác định bởi $T(x)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$.

(b) $T : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $T(x) = x(t_0)$ với $t_0 \in [0, 1]$ là một điểm cố định.

(c) $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ xác định bởi $T(x) = \sup\limits_{t \in [0,1]} x(t)$.

2. Cho (X, ρ) là một không gian metric và y là một điểm cố định của X. Chứng minh rằng

   (a) Hàm số $x \mapsto \rho(x, y)$ là một hàm liên tục.

   (b) Nếu x_n hội tụ tới x và y_n hội tụ tới y trong X thì $\rho(x_n, y_n)$ hội tụ tới $\rho(x, y)$.

3. Xét $d(x, y) = |x - y|$ và
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \neq y \\ 0 \text{ nếu } x = y \end{cases}$$
   lần lượt là metric thông thường, metric rời rạc trên tập số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng mọi ánh xạ f từ không gian metric $(\mathbb{R}, \rho)$ vào $(\mathbb{R}, d)$ đều liên tục. Những ánh xạ nào từ $(\mathbb{R}, d)$ vào $(\mathbb{R}, \rho)$ là liên tục?

4. Cho $f_n : X \to Y$ là một dãy các ánh xạ từ tập X và không gian metric Y, d là metric trên Y. Dãy ánh xạ $\{f_n\}$ gọi là hội tụ đều đến ánh xạ $f : X \to Y$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại số tự nhiên N sao cho
$$d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$
   với mọi $n \geqslant N$ và mọi $x \in X$.

   Giả sử X cũng là một không gian metric và $f_n : X \to Y$ là dãy ánh xạ liên tục hội tụ đều đến ánh xạ $f : X \to Y$. Chứng minh rằng:

   (a) f là ánh xạ liên tục.

   (b) Nếu $\{x_n\}$ là một dãy các điểm trong X hội tụ đến x thì dãy điểm $\{f_n(x_n)\}$ hội tụ đến $f(x)$ trong Y.

5. Cho A và B là hai tập đóng không rỗng rời nhau của không gian metric X. Chứng minh rằng tồn tại một ánh xạ liên tục $f : X \to [0,1]$ sao cho $f(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $f(x) = 1$ với mọi $x \in B$.

6. Hãy lấy ví dụ về một ánh xạ mở liên tục nhưng không là phép đồng phôi, một ánh xạ đóng liên tục nhưng không phải là một phép đồng phôi, một ánh xạ mở liên tục nhưng không là một ánh xạ đóng, một ánh xạ đóng liên tục nhưng không phải là ánh xạ mở.