BÀI TẬP KHÔNG GIAN METRIC (TUẦN 1)

1 Một số bất đẳng thức quan trọng

(Phần này tự chứng minh)

1. **(Bất đẳng thức AM - GM).** Cho các số thực dương a, b và $0 < \lambda < 1$. Chứng minh rằng
$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

2. **(Bất đẳng thức H$\ddot{o}$lder).** Cho hai bộ số không âm $\{x_i\}$ và $\{y_i\}$ và hai số thực p, q thỏa mãn $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Chứng minh rằng
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
Khi $p = q = 2$ ta có bất đẳng thức Cauchy - Schwarzt
$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. **(Bất đẳng thức Minkowski)** Cho hai bộ số không âm $\{x_i\}$ và $\{y_i\}$. Chứng minh rằng
$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i^p + y_i^p)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

4. Với 2 số không âm a, b và số thực $p > 1$. Chứng minh $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$.

5. Tìm dạng tích phân cho các bất đẳng thức trên và dạng chuỗi cho bất đẳng thức Minkowski.

2 Metric và các tính chất cơ bản

1. Ký hiệu $C[a, b]$ là tập hợp tất cả các hàm số liên tục trên $[a, b]$. Với $x, y \in C[a, b]$, ta xác định
$$d(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|;$$
$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt;$$
   (a) Chứng minh rằng d và ρ xác định các metric trên $C[a, b]$ nhưng 2 metric này không tương đương nhau, ρ gọi là metric tích phân còn d gọi là metric hội tụ đều

   (b) Hãy mô tả sự hội tụ trong 2 metric trên.

   (c) Hãy chỉ ra một dãy hàm liên tục hội tụ trong metric tích phân nhưng không hội tụ điểm.

   (d) Hãy xây dựng một dãy Cauchy trong metric tích phân nhưng không hội tụ.

2. Với số thực $1 \le p < +\infty$, ký hiệu $l^p = \{x = \{x_n\}_{n\geq 1} : \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < +\infty\}$. Với $x, y \in l^p$ ta đặt

$$d(x,y) = \left(\sum_{n\geq 1} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

   (a) Chứng minh rằng d xác định một metric trên l^p và đây là một không gian metric đầy đủ.
   (b) Chứng minh sự hội tụ trong l^p kéo theo sự hội tụ theo từng tọa độ nhưng ngược lại thì không đúng.
   (c) Chứng minh dãy $\{x_n = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...)\}$ hội tụ tới $x = (1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, ...)$ trong l^2.

3. **(Khoảng cách)**
   (a) Giả sử (X, d) là một không gian metric, $A \subset X, x \in X$. Khoảng cách từ điểm x đến tập hợp A được định nghĩa bởi

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

   Chứng minh rằng
   (i) $d(x, A) = d(x, \overline{A})$;
   (ii) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$;
   (iii) $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$, $\forall x, y \in X$.

   (b) Với hai tập A, B trong không gian metric X ta định nghĩa

$$d(A, B) = \sup\{d(x, B), x \in A\}; \quad d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

   $d_H(A, B)$ gọi là khoảng cách Hausdorff giữa hai tập A, B. Chứng minh rằng

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N_\varepsilon(B), B \subset N_\varepsilon(A)\},$$

   trong đó

$$N_\varepsilon(A) = \bigcup_{x\in A} \{z \in X : d(x, z) \le \varepsilon\}.$$