

## BÀI TẬP KHÔNG GIAN TÔPÔ (TUẦN 7+8)

### 1 Đại cương về không gian tô pô

1. Chứng minh rằng nếu 2 metric tương đương thì tô pô mà chúng sinh ra là tương đương.
  2. Cho  $A, B$  là các tập con của không gian tô pô  $X$ . Chứng minh rằng
    - a)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;
    - b)  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .
    - c)  $\text{Int}A \cup \text{Int}B \subset \text{Int}(A \cup B)$ ;
    - d)  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}A \cap \text{Int}B$ .
  3. Giả sử  $G$  là một tập con mở, còn  $A$  là tập con tùy ý của không gian tô pô  $X$ . Chứng minh rằng
    - a) Nếu  $G \cap A = \emptyset$  thì  $G \cap \overline{A} = \emptyset$ ;
    - b)  $\overline{G \cap A} = \overline{G} \cap \overline{A}$ .
  4. Chứng minh rằng để một họ  $\mathcal{B}$  các tập mở của không gian tô pô  $(X, \tau)$  là cơ sở của tô pô  $\tau$  điều kiện cần và đủ là với mỗi  $x \in X$  và mỗi tập mở  $U$  chứa  $x$  tồn tại tập  $V \in \mathcal{B}$  sao cho  $x \in V \subset U$ .
  5. Cho  $(X, \tau)$  là một không gian tô pô,  $\mathcal{B}$  là một cơ sở của tô pô  $\tau$ ,  $A \subset X$ ,  $x \in X$ . Chứng minh rằng  $x \in \overline{A}$  khi và chỉ khi với mọi  $B \in \mathcal{B}$  mà  $x \in B$  thì  $B \cap A \neq \emptyset$ .
  6. Trong mỗi trường hợp sau đây, tập  $A = (1, 2]$  có là tập đóng hay tập mở của không gian tô pô  $X$  với tô pô cảm sinh của tô pô thông thường trên  $\mathbb{R}$ .
    - a)  $X = \mathbb{R}$ ;
    - b)  $X = [0, 2]$ ;
    - c)  $X = (1, 3)$ ;
    - d)  $X = (1, 2] \cup (3, 4]$ .
  7. Cho  $Y$  là một không gian con của không gian tô pô  $X$  và  $B \subset Y$ . Kí hiệu bao đóng của  $B$  trong  $X$  là  $\overline{B}^X$ , bao đóng của  $B$  trong  $Y$  là  $\overline{B}^Y$ . Chứng minh rằng  $\overline{B}^Y = \overline{B}^X \cap Y$ .
  8. Cho  $Y$  là một không gian con của không gian tô pô  $X$  và  $B \subset Y$ . Kí hiệu phần trong của  $B$  trong  $X$  là  $\text{Int}_X B$ , phần trong của  $B$  trong  $Y$  là  $\text{Int}_Y B$ . Chứng minh rằng  $\text{Int}_X B \subset \text{Int}_Y B$ . Đưa ra ví dụ để chứng tỏ nói chung hai tập này không trùng nhau.
  9. Cho  $A, B$  là hai tập con của các không gian tô pô  $X, Y$ . Chứng minh rằng
    - a)  $\text{Int}(A \times B) = \text{Int}A \times \text{Int}B$ ;
    - b)  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$
- Từ đó suy ra rằng tích của 2 tập mở là tập mở, tích của 2 tập đóng là tập đóng.
10. Chứng minh rằng nếu  $A$  mở trong  $Y$  và  $Y$  mở trong  $X$  thì  $A$  mở trong  $X$ .
  11. Chứng minh rằng nếu  $U$  mở trong  $X$  và  $A$  đóng trong  $X$  thì  $U \setminus A$  mở trong  $X$  còn  $A \setminus U$  đóng trong  $X$ .

*GỢI Ý:*

1. Bài 91
2. Sử dụng định nghĩa (tự giải)
3. Bài 93
4. Bài 106
5. Sử dụng định nghĩa bao đóng
6. Sử dụng về tính chất đóng mở trong không gian con: a) Không đóng, không mở; b) Mở, không đóng; c) Đóng, không mở; d) Vừa đóng vừa mở.
7. Bài 118
8. Bài 119
9. Tự giải
10. Tự giải
11. Bài 92