BÀI TẬP KHÔNG GIAN METRIC (Tuần 6)

5 Tính chất compact trong không gian metric

Chú ý: Các bài có đánh dấu (*) không bắt buộc phải làm. Có thể tham khảo lời giải của các bài tập dưới đây trong cuốn **Bài tập tôpô đại cương, độ đo, tích phân** *của tác giả Bùi Đắc Tắc, Nguyễn Thanh Hà, NXB ĐHQGHN, 1998.*

1. Tập con đóng của tập compact, hợp hữu hạn các tập compact, giao tùy ý các tập compact là tập compact.
2. Chứng minh rằng trong không gian metric rời rạc một tập con là compact khi và chỉ khi nó có hữu hạn phần tử.
3. Cho ví dụ về tập compact trong $C[0,1]$ với metric tích phân nhưng không compact với metric sup.
4. a) Chứng minh rằng nếu f là ánh xạ từ không gian metric compact X vào chính nó thoả mãn điều kiện
$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y), \forall x, y \in X,$$
thì f có điểm bất động duy nhất.
b) Cho ví dụ chứng tỏ rằng nếu bỏ giả thiết compact là không bỏ được.
5. Giả sử A, B là những tập con rời nhau của một không gian metric (X, ρ).
a) Chứng minh rằng nếu một trong hai tập là compact còn tập kia là đóng thì
$$\rho(A, B) := \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0.$$
b) Hãy chỉ ra hai tập đóng rời nhau A, B mà $\rho(A, B) = 0$.
6. Cho X, Y là hai không gian metric. Chứng minh rằng ánh xạ $f : X \to Y$ liên tục khi và chỉ khi nó liên tục trên mỗi tập con compact của X.
7. Chứng minh rằng mọi hàm liên tục đều trên tập hoàn toàn bị chặn thì bị chặn.
8. (*) Cho (X, d) là một không gian metric compact và f là một ánh xạ từ X vào X sao cho
$$d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y), \forall x, y \in X.$$
Chứng minh f là một phép đẳng cự từ X lên X.
9. (*) Giả sử (X, ρ) là một không gian metric compact và $\mathcal{F}$ là tập hợp tất cả các phép đẳng cự của X lên X. Với mỗi cặp phần tử $f, g \in \mathcal{F}$, đặt
$$d(f, g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x)).$$
Chứng minh rằng d là một metric trên $\mathcal{F}$ và với khoảng cách ấy $\mathcal{F}$ là một không gian metric compact.
10. (*) **(Bổ đề phủ Lebesgue)** Cho X là một không gian metric compact, $\{G_i | i \in I\}$ là một phủ mở của X. Chứng minh rằng tồn tại số dương δ sao cho mọi hình cầu mở bán kính $< \delta$ đều thuộc ít một G_i.
11. (*) **(Định lý Đini)** Chứng minh rằng nếu dãy đơn điệu các hàm liên tục $\{f_n\}$ hội tụ điểm trên không gian metric compact X tới hàm liên tục f thì hội tụ đều.