Gợi ý giải bài tập tuần 5

1. Gọi x_0 là điểm duy động duy nhất của A^n (tồn tại duy nhất theo nguyên lý ánh xạ co). Chứng tỏ x_0 cũng là điểm bất động duy nhất của A.

2. Xét ánh xạ $y = Tx$ từ $\mathbb{R}^n$ vào chính nó xác định bởi

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

   Sau đó xét $\mathbb{R}^n$ là không gian metric đầy đủ với lần lượt các metric sau

$$d_\infty(x, y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|;$$

$$d_1(x, y) = \sum_{1\le i\le n} |x_i - y_i|;$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{1\le i\le n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}};$$

   Hãy chứng tỏ rằng T là các ánh xạ co.

3. Chứng minh Φ là ánh xạ co bằng cách chứng minh

$$\sup_{t\in[a,b]} |\Phi(x) - \Phi(y)| \le |\lambda| \int_a^b |K(t, s)||x(s) - y(s)|ds \le |\lambda|M(b - a) \sup_{s\in[a,b]} |x(s) - y(s)|.$$

4. Sử dụng định lý Lagrange.

5. Gọi x_n là điểm bất động tương ứng của f_n. Sử dụng giả thiết compact thì có dãy con x_{n_k} hội tụ tới x. Sau đó sử dụng tính chất nếu f_n hội tụ đều tới f và x_n hội tụ tới x thì $f_n(x_n)$ hội tụ tới $f(x)$, kết luận được x là điểm bất động của f.